ZESTAW V

(1) Niech e_i będzie punktem w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$, którego i-ta współrzędna jest 1, a pozostałe współrzędne są zerami, $e_0=(0,\dots,0)$ i niech, dla $0\le i_1<\dots<i_m\le n$,
$$\Delta(i_1,\dots,i_m)=\{\sum_{k=1}^{m}\lambda_k e_{i_k} : \lambda_k\ge 0, \sum_{k=1}^{m}\lambda_k=1\}$$ będzie sympleksem w $\mathbb{R}^n$ rozpiętym na wierzchołkach $e_{i_1},\dots,e_{i_m}$.

Udowodnić twierdzenie Knastera–Kuratowskiego–Mazurkiewicza: jeśli $F_0,\dots,F_n$ są zbiorami domkniętymi w $\mathbb{R}^n$ takimi, że dla każdego układu $0\le i_1<\dots<i_m\le n$, $\Delta(i_1,\dots,i_m)\subset F_{i_1}\cup\dots\cup F_{i_m}$, to $\bigcap_{i=0}^{n}F_i\ne\emptyset$.

<u>Wskazówka</u> Założyć przeciwnie i pokazać, że dla rozkładu jedynki $\lambda_0,\dots,\lambda_n$ na sympleksie $\Delta=\Delta(0,\dots,n)$ wpisanym w pokrycie $W_i=\Delta\setminus F_i$, przekształcenie $f:\Delta\to\Delta$ określone formułą $f(x)=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i(x)e_i$ nie ma punktu stałego.

---

(2) Przyjmijmy oznaczenia z zadania 1, niech $\Delta=\Delta(0,\dots,n)$ i niech $\Delta_i=\Delta(0,\dots,i-1,i+1,\dots,n)$ będzie ścianą sympleksu Δ przeciwległą do wierzchołka e_i.

Wykazać, że jeśli $A_0,\dots,A_n$ są zbiorami domkniętymi w $\mathbb{R}^n$, $\Delta\subset\bigcup_{i=0}^{n}A_i$ oraz $A_i\cap\Delta_i=\emptyset$, to $\bigcap_{i=0}^{n}A_i\ne\emptyset$.

---

(3) Wykazać, że dla sympleksu $\Delta=\Delta(0,\dots,n)$ (zob. zad. 1) istnieje $r>0$ takie, że jeśli $\mathcal{F}$ jest skończoną rodziną zbiorów domkniętych w Δ o średnicach $<r$ i $\Delta=\bigcup\mathcal{F}$, to istnieje punkt w Δ należący do co najmniej $n+1$ elementów rodziny $\mathcal{F}$.

Wskazówka. Dobrać $r>0$ taki, że żaden zbiór o średnicy $< r$ nie przecina wszystkich ścian Δ_j (oznaczenia jak w zadaniu 2). Następnie, dla rodziny $\mathcal{F}$ opisanej w zadaniu określić indukcyjnie $\mathcal{G}_j \subset \mathcal{F}$: $\mathcal{G}_0 = \{F \in \mathcal{F} : F \cap \Delta_0 = \emptyset\}$, $\mathcal{G}_{j+1} = \{F \in \mathcal{F} \setminus \bigcup_{k=1}^{j} \mathcal{G}_k : F \cap \Delta_{j+1} = \emptyset\}$. Zauważyć, że $\mathcal{F} = \bigcup_j \mathcal{G}_j$, przyjąć $A_j = \bigcup \mathcal{G}_j$ i skorzystać z zadania 2.

---

(4) Niech $H_i^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0\}$, $H_i^- = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \leq 0\}$ i niech $F_i^+ = \{x \in [-1,1]^n : x_i = 1\}$, $F_i^- = \{x \in [-1,1]^n : x_i = -1\}$ będą przeciwległymi ścianami kostki $[-1,1]^n$.

Pokazać, że jeśli przekształcenie ciągłe $f : [-1,1]^n \to \mathbb{R}^n$ spełnia warunki $f(F_i^+) \subset H_i^-$ oraz $f(F_i^-) \subset H_i^+$, dla $i = 1, \ldots, n$, to $(0, 0, \ldots, 0) \in f([-1,1]^n)$.

Wskazówka. Niech $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Założyć, że $(0, \ldots, 0) \notin f([-1,1]^n)$ i rozpatrzyć $g : [-1,1]^n \to [-1,1]^n$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{\max\{|f_i(x)| : i \leq n\}}$

---

(5) Niech F_i^+, F_i^- będą ścianami kostki $[-1,1]^n$ określonymi w zadaniu 4. Pokazać, że jeśli A_i^+, A_i^- są zbiorami domkniętymi w $\mathbb{R}^n$ takimi, że $F_i^+ \subset A_i^+$, $F_i^- \subset A_i^-$ oraz $[-1,1]^n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i^+ \cup A_i^-)$ to istnieje i takie, że $A_i^+ \cap A_i^- = \emptyset$.

Wskazówka. Założyć przeciwnie i rozpatrzyć funkcję $f = (f_1, \ldots, f_n) : [-1,1]^n \to [-1,1]^n$, gdzie $f_i : [-1,1]^n \to [-1,1]$ przyjmuje na A_i^+ wartość 1, a na A_i^- wartość -1.

6 Niech $u, v : [-1,1] \to [-1,1]$ będą funkcjami ciągłymi takimi, że $u^{-1}(k) = v^{-1}(k) = \{k\}$ dla $k \in \{-1, 1\}$. Wykazać, że zbioru $T = \{(s,t) \in [-1,1]^2 : u(s) = v(t)\}$ nie można rozłożyć na sumę dwóch rozłącznych zbiorów domkniętych, z których jeden zawiera punkt $(-1,-1)$, a drugi punkt $(1,1)$.

Wskazówka. Założyć przeciwnie, że T rozkłada się na rozłączne zbiory domknięte C_{-1} i C_1, $(k,k) \in C_k$. Określić zbiory otwarte U_k w kwadracie $[-1,1]^2$ takie, że $C_k \subset U_k$, $\overline{U_{-1}} \cap \overline{U_1} = \emptyset$ i $\overline{U_k}$ nie przecina boków kwadratu nie zawierających punktu (k,k). Przyjąć $A_k = \overline{U_k} \cup (\{k\} \times [-1,1])$, $B_k = \{(s,t) : ku(s) \leqslant kv(t)\} \setminus U_{-k}$ i pokazać sprzeczność z Zadaniem 5.

7 (A) Niech $f : X \to D^n$ będzie przekształceniem ciągłym przestrzeni metryzowalnej X w kulę $D^n \subset \mathbb{R}^n$ i niech $A = f^{-1}(S^{n-1})$. Pokazać, że następujące dwa warunki są równoważne:

(i) nie istnieje przekształcenie ciągłe $\tilde{f} : X \to S^{n-1}$ takie, że $\tilde{f}|A = f|A$,

(ii) dla każdego przekształcenia ciągłego $g : X \to D^n$ istnieje $x \in X$ takie, że $f(x) = g(x)$.

(B) Niech $f : D^n \to D^n$ będzie przekształceniem ciągłym takim, że $f(S^{n-1}) \subset S^{n-1}$ i obcięcie $f|S^{n-1} : S^{n-1} \to S^{n-1}$ nie jest homotopijne z przekształceniem stałym. Pokazać, że dla każdego ciągłego $g : D^n \to D^n$ istnieje $x \in D^n$ takie, że $f(x) = g(x)$.

8 Pokazać, że jeśli $f, g : X \to S^n$ są dwoma przekształceniami ciągłymi takimi, że dla dowolnego $x \in X$, $d_e(f(x), g(x)) < 2$, to f i g są homotopijne.

9 Pokazać, że każde przekształcenie ciągłe $f : X \to S^n$ takie, że $f(X) \neq S^n$ jest homotopijne z funkcją stałą.

11 Pokazać, że każde przekształcenie ciągłe $f : X \to Y$ określone na przestrzeni ściągalnej X jest homotopijne z funkcją stałą.

12 Niech $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ i niech $X = A \times [0,1] \cup [0,1] \times \{1\}$ będzie podprzestrzenią płaszczyzny euklidesowej.

(A) Pokazać, że X jest ściągalna.

(B) Pokazać, że nie istnieje homotopia $H : X \times I \to X$ łącząca id_X z przekształceniem stałym o jednopunktowym obrazie $\{(0,0)\}$, taka, żeby dla dowolnego $t \in I$ zachodziło $H((0,0),t) = (0,0)$.

Wskazówka. Założyć przeciwnie i rozważyć drogę $H|(\{\frac{1}{n}\} \times I)$ dla n takiego, że $\frac{1}{n} < \mathrm{dist}(\{0\} \times I, H^{-1}((0,1)))$.

13 Niech $I(x,y)$ oznacza odcinek na płaszczyźnie łączący x z y. W $\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową dane są podprzestrzenie $X = I(x_0,p) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} I(x_n,p)$ i $Y = X \cup -X$, gdzie $x_0 = (0,0)$, $p = (0,1)$, $x_n = (\frac{1}{n},0)$, a $-X$ oznacza zbiór symetryczny do X względem punktu $(0,0)$.

(A) Pokazać, że X jest przestrzenią ściągalną, ale przestrzeń Y nie jest ściągalna.

Wskazówka. W dowodzie nieściągalności Y założyć przeciwnie, że istnieje homotopia $H : Y \times I \to Y$, $H(y,0) = y$, $H(y,1) = x_0$ dla $y \in Y$. Korzystając ze wskazówki do Zadania 6.4 (B) zauważyć, że $D = \{x_0\} \times I \cap H^{-1}(\{p,-p\}) \neq \emptyset$ i rozważyć obcięcie H do $Y \times [0,t]$, gdzie $t = \inf\{s \in I : (x_0,s) \in D\}$.

(B) Niech $Z = j(X) \cup -j(X) \subset \mathbb{R}^2$, gdzie j jest jednokładnością o środku w p i współczynniku 2. Pokazać, że przestrzeń Z nie jest ściągalna.

Wskazówka. Założyć przeciwnie, że istnieje homotopia $H : Z \times I \to Z$, $H(z,0) = z$, $H(z,1) = p$ dla $z \in Z$. Dla każdej pary $(z,t) \in Y \times I \subset Z \times I$ przyjąć $u(z,t) = \inf\{s \geqslant t : H(z,s) \in Y\}$ oraz $G(z,t) = H(z,u(z,t))$. Pokazać, że $G : Y \times I \to Y$ jest ciągłe i wyprowadzić sprzeczność z (A).

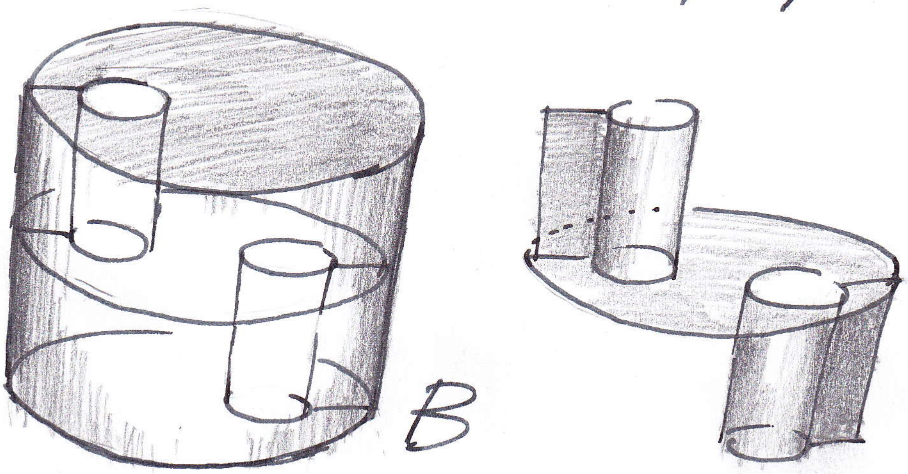
14 Niech, dla $p \in \mathbb{R}^n$, przekształcenie $\pi_p : \mathbb{R}^n \setminus \{p\} \to S^{n-1}$ będzie określone formułą $\pi_p(x) = \frac{x-p}{||x-p||}$.

(A) Niech $X \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem zwartym i $\gamma : I \to \mathbb{R}^n \setminus X$ drogą. Sprawdzić, że $H : X \times I \to S^{n-1}$ określone wzorem $H(x,t) = \pi_{\gamma(t)}(x)$ jest homotopią łączącą $\pi_{\gamma(0)}|X$ z $\pi_{\gamma(1)}|X$.

(B) Pokazać, że dla każdego zbioru zwartego $X \subset \mathbb{R}^n$, punkt $p \in \mathbb{R}^n \setminus X$ leży w składowej nieograniczonej zbioru $\mathbb{R}^n \setminus X$ wtedy i tylko wtedy, gdy obcięcie $\pi_p|X : X \to S^{n-1}$ jest homotopijne ze stałą.

15

Dom Binga z dwoma pokojami.



Do brzegu walca W dodaje się dysk przedzielający wnętrze na dwie części, usuwa się po jednym dysku w podstawie górnej i dolnej walca, oraz dwa odpowiadające im rozłączne dyski w przegródce, a następnie wstawia się dwie rury ze wspornikami, tworzące dwa niezależne wejścia do dwóch pokojów domu Binga B.

Pokazać, że dom Binga jest retraktem deformacyjnym walca W, tzn. istnieje homotopia $H: W \times I \to W$ taka, że $H(x,0)=x$, $x \in W$, $H(x,1) \in B$, $x \in W$ oraz $H(x,t)=x$ dla $(x,t) \in B \times I$.

Wywnioskować stąd, że B jest przestrzenią ściągalną.